Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 25 | Session : 2019

Épreuve de : Mathématiques E.M.L. S

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

E2-00012 248668 Maths S

Partie A

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi_a(P) = 2P + (X-a)P'$

① • $2P \in \mathbb{R}_n[X]$

et comme $\deg(P') \leq n-1$,

alors $\deg((X-a)P') \leq n$

Donc $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi_a(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ (i)

• Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\varphi_a(P+\lambda Q) = 2(P+\lambda Q) + (X-a)(P+\lambda Q)'$

$= 2P + (X-a)P' + \lambda(2Q + (X-a)Q')$

$= \varphi_a(P) + \lambda\varphi_a(Q)$ (ii)

Selon (i) et (ii), $\varphi_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$

② Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

• Soit $k \in [\![1, n]\!]$,

$\varphi_a(X^k) = 2X^k + (X-a)kX^{k-1}$

$= (2+k)X^k - akX^{k-1}$

• $\varphi_a(1) = 2 \times 1 + (X-a) \times 0 = 2$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Ainsi, il vient :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Psi_a) = \begin{pmatrix} 2 & -a & 0 & & & (0) \\ 0 & 3 & \ddots & & & \\ \vdots & 0 & \ddots & -ak & & \\ & & & (2+k) & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & -an \\ 0 & 0 & \cdots & & & n+2 \end{pmatrix}$$

③ a) • La matrice de Ψ_a dans la base canonique est triangulaire supérieure, on en déduit que :

$$Sp(\Psi_a) = \{2, 3, \dots, n+2\}$$

• Or $\forall (k,k') \in [\![1, n]\!]^2$, $2+k \neq 2+k' \neq 1$
(car $x \mapsto 2+x$ est une fonction affine)
Donc Ψ_a admet $n+1$ valeurs propres distinctes dans un espace vectoriel de dimension $n+1$.

Ainsi Ψ_a est diagonalisable et $Sp(\Psi_a) = \{(2+k), k \in [\![0, n]\!]\}$

b) • Comme $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $2+k \neq 0$
on en déduit que 0 n'est pas valeur propre
Donc Ψ_a est un endomorphisme injectif

• Or la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ étant finie, il vient que Ψ_a est bijective
D'où : $\Psi_a \in GL(\mathbb{R}^n)$

c) Posons : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $Q_k = (X-a)^k$

- Si $k=0$: $\Psi_a(Q_0) = \Psi_a(1) = 2 = 2Q_0$

Comme $Q_0 = 1 \neq 0$

Donc Q_0 est un vecteur propre associé à la valeur propre $2 = 2+0$

- Si $k \in [\![1, n]\!]$, $\Psi_a(Q_k) = \Psi_a((X-a)^k)$

$$= 2(X-a)^k + (X-a) \times k \times 1 \times (X-a)^{k-1}$$
$$= 2(X-a)^k + k(X-a)^k$$
$$= (2+k)(X-a)^k$$

Comme $Q_k \neq 0$, il vient que Q_k est un vecteur propre associé à la valeur propre $2+k$

Ainsi, $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\Psi_a(Q_k) = (2+k)Q_k$

d) Comme on a que :

- $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$
- Ψ_a admet $n+1$ valeurs propres distinctes, on en déduit

$\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\dim(\mathrm{Ker}(\Psi_a - (2+k)id)) = 1$

Or $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $Q_k \in \mathrm{Ker}(\Psi_a - (2+k)id)$

donc $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathrm{Ker}(\Psi_a - (2+k)id) = \mathrm{Vect}(Q_k)$

4) a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$

$$((X-a)^2P(X))' = 2(X-a)P(X) + P'(X)(X-a)^2$$
$$= (X-a)(2P(X) + (X-a)P'(X))$$
$$= (X-a)\Psi_a(P)$$

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $((X-a)^2P(X))' = (X-a)\Psi_a(P)$

b) $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \forall x \in \mathbb{R},$

$$\phi_a(P)(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x (t-a)P(t)\,dt & \text{si } x \neq a \\ \frac{P(a)}{2} & \text{si } x = a \end{cases}$$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $x \in \mathbb{R}$

- si $x \neq a$, $\phi_a(\psi_a(P))(x) = \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x (t-a)\psi_a(P)(t)\,dt$

$$= \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x ((t-a)^2P(t))'\,dt \text{ selon (4) a)}$$

Or $t \mapsto ((t-a)^2P(t))'$ est continue sur $[a,x]$ en tant que fonction polynomiale

donc $x \mapsto \int_a^x ((t-a)^2P(t))'dt$ est l'unique primitive de $t \mapsto (t-a)^2P(t)$ qui s'annule en a.

Alors il vient que :

$$\phi_a(\psi_a(P))(x) = \frac{1}{\cancel{(x-a)^2}} \cancel{(x-a)^2} P(x) = P(x)$$

Donc $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, \phi_a(\psi_a(P))(x) = P(x)$

- Si $x = a$: $\psi_a(P)(a) = 2P(a) + (a-a)P' = 2P(a)$

Alors $\frac{2P(a)}{2} = P(a)$

Ainsi, on a : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \phi_a(\psi_a(P)) = P$.

c) - Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq a$, $\phi_a(P+\lambda Q)(x) = \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x (t-a)(P+\lambda Q)(t)\,dt$

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 25	Session : 2019

Épreuve de : Mathématiques EML . S

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

c à d $\phi_a(P+\lambda Q)(x) = \frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x (t-a)(P(t)+\lambda Q(t))\,dt$

$= \frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x (t-a)P(t)\,dt + \lambda\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x (t-a)Q(t)\,dt$

car $t\mapsto (t-a)P(t)$, $t\mapsto \lambda(t-a)Q(t)$ et $t\mapsto (t-a)(P(t)+\lambda Q(t))$ sont continues sur $[a,x]$.

Autrement dit, $\phi_a(P+\lambda Q)(x) = \phi_a(P)(x) + \lambda\phi_a(Q)(x)$

- si $x \neq a$: $\phi_a(P+\lambda Q)(a) = \frac{(P+\lambda Q)(a)}{2} = \frac{P(a)}{2} + \lambda\frac{Q(a)}{2} = \phi_a(P)(a) + \lambda\phi(Q)(a)$

donc ϕ_a est linéaire

- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$
Comme ϕ_a est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, et on a d'après ④b),
$\phi_a(\psi_a(P)) = P$.

alors $\psi_a(P) = \phi_a^{-1}(P)$, et ceci $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$
Comme la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ est finie, alors

$\phi_a^{-1} = \psi_a$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

d) Comme $\phi_a^{-1} = \Psi_a$ et Ψ_a est diagonalisable,
alors ϕ_a^{-1} est diagonalisable
Donc il existe P de $GL_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale, telles que

$Mat_B(\phi_a^{-1}) = P D P^{-1}$ et les éléments diagonaux de D sont non nuls car $0 \notin Sp(\phi_a)$

alors $Mat_B(\phi_a) = (Mat_B(\phi_a^{-1}))^{-1} = (PDP^{-1})^{-1}$

$= P^{-1} D^{-1} P$

En posant $Q = P^{-1}$, donc $Q^{-1} = P$.

On a qu'il existe une matrice Q inversible et une matrice diagonale D^{-1} telles que :

$Mat_B(\phi_a) = Q D^{-1} Q^{-1}$

donc ϕ_a est diagonalisable
Comme $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $(D^{-1})_{ii} = \frac{1}{(D)_{ii}}$, légitime car $(D)_{ii} \neq 0$

Or comme $Sp(\phi_a^{-1}) = Sp(\Psi_a) = \{2+k,\ k \in [\![0,n]\!]\}$

alors $Sp(\phi_a) = \{\frac{1}{2+k},\ k \in [\![0,n]\!]\}$

Partie B

Fixons $a \neq 0$

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$

(5) a) $\forall x \in \mathbb{R}, \; h(x) = \int_0^x t f(t)\, dt$

Soit $x \in \mathbb{R}$

- $t \mapsto t$ est continue sur $[0,x]$
- $t \mapsto f(t)$ – — — — –

donc $t \mapsto t f(t)$ est continue sur $[0,x]$

alors h est l'unique primitive de $t \mapsto t f(t)$ qui s'annule en 0

donc h est C^1 en x, et ceci pour tout x de $\mathbb{R}$

donc h est C^1 sur $\mathbb{R}$

et $\forall x \in \mathbb{R}, \; h'(x) = x f(x)$

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

c) D'après b) on a que

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; \exists (\alpha_x, \beta_x) \in [0,x]^2 \;/$

$$f(\alpha_x) \frac{x^2}{2} \leqslant h(x) \leqslant f(\beta_x) \frac{x^2}{2}$$

alors en divisant par x^2, légitime car $x > 0$, on a :

$$\frac{f(\alpha_x)}{2} \leqslant \frac{h(x)}{x^2} \leqslant \frac{f(\beta_x)}{2} \qquad (*)$$

Comme $\alpha_x \in [0,x]$, alors $\lim\limits_{x \to 0^+} \alpha_x = 0$

de même $\lim\limits_{x \to 0^+} \beta_x = 0$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x \to 0^+} f(\alpha_x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(\beta_x) = f(0)$

donc, en faisant tendre x vers 0^+ dans $(*)$, on a par encadrement :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$$

d) De la même manière, pour x appartenant à $\mathbb{R}_*^-$, on montre que :

$$\exists (\alpha'_x, \beta'_x) \in [x, 0] \ / \ f(\alpha_x) \frac{x^2}{2} \leq h(x) \leq f(\beta_x) \frac{x^2}{2}$$

de même, $\lim_{x \to 0^-} \alpha'_x = 0$ car $\alpha'_x \in [x, 0]$

et $\lim_{x \to 0^-} \beta'_x = 0$ car $\beta'_x \in [x, 0]$

et par continuité de f en 0, et par encadrement, on conclut que :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$$

(6) • h est C^1 sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$

• $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

Alors par produit de fonctions continues,

$$x \mapsto \frac{1}{x^2} h(x) \text{ est continue sur }]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

Autrement dit $\phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_*^-$ et sur $\mathbb{R}_*^+$

or $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} h(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} h(x) = \frac{f(0)}{2} = \phi(f)(0)$

Donc $\phi(f)$ est continue en 0.

Donc $\phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$

• De plus, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est C^1 sur $\mathbb{R}_*^-$ et sur $\mathbb{R}_*^+$

et h est C^1 sur $\mathbb{R}$

Alors par produit, $\phi(f)$ est C^1 sur $\mathbb{R}_*^-$ et sur $\mathbb{R}_*^+$

Emplacement QR Code

Code épreuve : 295 | **Nombre de pages :** 25 | **Session :** 2019

Épreuve de : Mathématiques EML S

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Soit $x \in \mathbb{R}^*$

$$\phi(f)'(x) = \frac{-2}{x^3} h(x) + h'(x) \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} h'(x) - \frac{2}{x^2} h(x) \right)$$

$$= \frac{1}{x} \left(f(x) - 2\, \phi(f)(x) \right)$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\underline{\phi(f)'(x) = \frac{1}{x} \left(f(x) - 2\, \phi(f)(x) \right)}$

2 a) • Supposons que f soit paire

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $\phi(f)(-x) = \frac{1}{(-x)^2} \int_0^{-x} t f(t)\, dt$

en posant le changement de variable affine $u = -t$ (licite), on a :

$$\phi(f)(-x) = \frac{1}{x^2} \int_0^{x} -u \underbrace{f(-u)}_{= f(u) \text{ car } f \text{ est paire}} (-du)$$

$$= \frac{1}{x^2} \int_0^{x} u f(u)\, du$$

$$= \phi(f)(x)$$

et $\mathbb{R}$ est centré en 0

donc $\underline{\phi(f) \text{ est paire}}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

- Supposons que f soit impaire :

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, $\phi(-x) = \frac{1}{x^2}\int_0^{-x} t f(t) dt$

Toujours par le changement de variable affine $u = -t$, on a :

$$\phi(f)(-x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x -u \underbrace{f(-u)}_{= -f(u) \text{ car } f \text{ impaire}} - du$$

$$= -\frac{1}{x^2} \int_0^x u f(u) du$$

$$= -\phi(f)(x)$$

et $\mathbb{R}$ est centré en 0

Donc $\phi(f)$ est impaire

b) Supposons que f soit à valeurs positives

- donc $f(0) \geq 0$ donc $\frac{1}{2}f(0) \geq 0$ donc $\phi(f)(0) \geq 0$
- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\phi(f)(x) = \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\geq 0} \int_0^x \underbrace{t}_{\geq 0} \underbrace{f(t)}_{\geq 0} dt$$

alors les bornes étant dans l'ordre croissant, par positivité croissance de l'intégrale, $\int_0^x t f(t) dt \geq 0$

Donc $\phi(f)(x) \geq 0$.

- Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$, $\phi(f)(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt$

$$= -\frac{1}{x^2} \int_x^0 \underbrace{t}_{\leq 0} \underbrace{f(t)}_{\geq 0} dt$$

$\forall t \in [x, 0]$, $t f(t) \leq 0$ car $x < 0$ et f positive

Alors, comme les bornes sont rangées dans l'ordre croissant ($0 > x$) on a par positivité de l'intégrale, $\int_x^0 t f(t) dt \leq 0$

donc $\frac{-1}{x^2}\int_0^x t f(t)\,dt \geq 0$, autrement dit : $\phi(f)(x) \geq 0$

Ainsi, si f est positive sur $\mathbb{R}$, $\phi(f)$ l'est aussi

(8) Soit $\ell \in \mathbb{R}$

Notons $g : t \mapsto f(t) - \ell$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, g l'est aussi

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

Alors, comme g est continue sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \phi(g)(x) = 0$$

autrement dit, $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(f(x)-\ell) = 0$

Or comme ϕ est linéaire, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \phi(f(x)-\ell) = \phi(f)(x) + \frac{\ell}{x^2}\int_0^x t\,dt$$

$$= \phi(f)(x) + \frac{\ell}{x^2} \times \frac{x^2}{2}$$

$$= \phi(f)(x) - \frac{\ell}{2}$$

donc si $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(f(x)-\ell) = 0$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(f)(x) - \frac{\ell}{2} = 0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(f)(x) = \frac{\ell}{2}$

b) Posons $h : x \mapsto f(-x)$

h est continue sur $\mathbb{R}$ par théorème de composition

si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$:

Alors d'après (8) a), $\lim_{x \to +\infty} \phi(R)(x) = \frac{\ell}{2}$

donc $\lim_{x \to +\infty} \phi(\beta)(-x) = \frac{\ell}{2}$

donc $\lim_{x \to -\infty} \phi(\ell)(x) = \frac{\ell}{2}$.

Partie C

$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2} \int_0^x t F(t)\, dt & \text{si } x \neq 0 \\ F(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$

où F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité

(9) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, par croissance de F, on a : $\forall t \in [0,x],\ F(t) \leq F(x)$

$G(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x t F(t)\, dt \leq \frac{2}{x^2} \int_0^x t F(x)\, dt$

$\leq F(x) \frac{2}{x^2} \int_0^x t\, dt$

$\leq F(x) \frac{2}{x^2} \frac{x^2}{2}$

$\leq F(x)$ (i)

et $\forall t \in [0,x],\ tF(t) \geq 0$ (ii)

donc par positivité de l'intégrale, alors on a par (i) et (ii)

$\forall x > 0,\ 0 \leq G(x) \leq F(x)$

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 25 | Session : 2019

Épreuve de : Mathématiques EML S

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

• Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$G(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x t F(t)\,dt$$

(10) On a $G = 2\,\phi(F)$

F est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est la fonction de répartition d'une variable à densité

Alors, selon B/(6), $\phi(F)$ est C^1 sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$

Donc $G = 2\,\phi(F)$ est C^1 sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$

$$G'(x) = 2\,\phi(F)'(x)$$
$$= 2\,\frac{1}{x}\left(F(x) - 2\,\phi(F)(x)\right) \quad \text{selon B/(6)}$$

$$G'(x) = \frac{2}{x}\left(F(x) - G(x)\right)$$

(11) Notons $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{2}{x}\left(F(x) - G(x)\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

• D'après ce qui précède, F et G sont continues sur $\mathbb{R}$
Comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$
alors g est continue sur $\mathbb{R}$ par théorèmes généraux sur $\mathbb{R}$
sauf éventuellement en 0 (i)

• $g(0) = 0$
Soit $x > 0$, comme $0 \leq G(x) \leq F(x)$ d'après (g)

alors $0 \leq F(x) - G(x)$
donc $0 \leq \frac{2}{x}(F(x) - G(x))$ car $x > 0$

d'où $0 \leq g(x)$

Soit $x < 0$, on a : $0 \leq F(x) \leq G(x)$

donc $0 \leq G(x) - F(x)$
donc $F(x) - G(x) \leq 0$
donc $\frac{2}{x}(F(x) - G(x)) \geq 0$ car $x < 0$

d'où $g(x) \geq 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geq 0$ (ii)

• Passons à l'intégrale
Soit $A > 0$, $\int_0^A g(x)\,dx = \int_0^A G'(x)\,dx = G(A) - G(0)$
$= 2\phi(F)(A)$.
Or $\lim_{A \to +\infty} F(A) = 1$ par définition

alors par B/⑧ a), $\lim_{A \to +\infty} \phi(F)(A) = \frac{1}{2}$

donc $\lim\limits_{A \to +\infty} 2\,\phi(F)(A) = 1$

donc $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A g(x)\,dx = 1 - G(0)$

• Soit $B < 0$, $\int_B^0 g(x)\,dx = G(0) - G(B)$
$= G(0) - 2\,\phi(F)(B)$

or $\lim\limits_{B \to -\infty} F(B) = 0$ par définition

alors par B / ⑧, $\lim\limits_{B \to -\infty} 2\,\phi(F)(B) = 0$

donc $\lim\limits_{B \to -\infty} \int_B^0 g(x)\,dx = G(0)$

Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$ converge par Chasles, et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = 1 - G(0) + G(0) = 1 \quad (iii)$$

Ainsi, selon (i), (ii) et (iii), g est une densité de probabilité

Soit V une variable à densité dont g est une densité
Notons F_V sa fonction de répartition, alors :
$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F_V(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} g(t)\,dt + \int_0^x g(t)\,dt$$

$$= \lim_{B \to -\infty} \int_B^0 G'(t)\,dt + G(x) - G(0)$$

$$= \lim_{B \to -\infty} \big(G(0) - G(B)\big) + G(x) - G(0)$$

$$= G(0) + G(x) - G(0) \quad \text{d'après ce qui précède}$$

$$= G(x)$$

G est la fonction de répartition de V

(12) $\forall x \in \mathbb{R},\ h_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) • $\forall x \in \mathbb{R}^-,\ h_1(x) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ e^{-x^2} > 0$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 2x e^{-x^2} > 0$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ h_1(x) > 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ h_1(x) \geq 0$ (i)

• h_1 est continue sur $\mathbb{R}_*^-$ car elle est constante égale à 0

• h_1 est continue sur $\mathbb{R}_*^+$ par théorèmes généraux

$\lim\limits_{x \to 0^+} h_1(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 2x e^{-x^2} = 0 \times 1 = 0 = h_1(0)$

donc h_1 est continue en 0

Donc h_1 est continue sur $\mathbb{R}$ (ii)

• $\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(x)\,dx$ converge $\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} 2x e^{-x^2}\,dx$ converge car h_1 nulle sur $\mathbb{R}^-$

Soit $A > 0$, $\int_0^A 2x\, e^{-x^2}\,dx = \left[-e^{-x^2} \right]_0^A = \underbrace{-e^{-A^2}}_{\xrightarrow[A \to +\infty]{} 0} + 1$

Donc $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A 2x e^{-x^2}\,dx = 1$

donc $\int_0^{+\infty} h_1(x)\,dx$ converge et vaut 1.

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(x)\,dx$ converge et vaut 1 (iii)

Selon (i), (ii), (iii) h_1 est une densité de probabilité

b) Soit X_1 une variable à densité dont h_1 est une densité

X_1 admet une espérance $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x\, h_1(x)\, dx$ converge

$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} 2x^2 e^{-x^2} dx$ converge car h_1 est nulle sur $\mathbb{R}^-$

Notons $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$

X admet une espérance qui vaut 0 et une variance qui vaut $\frac{1}{2}$

Par Koenig Huygens, $E(X^2) = \frac{1}{2}$

Soit f_X une densité de X, ~~définie~~ par :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$

Comme X admet un moment d'ordre 2, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-x^2} dx$ converge

et on a $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$ par parité de l'intégrande

c'à'd $\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$

donc $\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 2\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$

Ainsi, $\int_0^{+\infty} 2x^2 e^{-x^2} dx$ converge et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, autrement dit

X_1 admet une espérance et $E(X_1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

c) Notons H_1 la fonction de répartition de X_1

Soit $H_2 = 2\,\Phi(H_1)$

• Soit $x \in \mathbb{R}_*^-$, $H_2(x) = 2\,\Phi(H_1)(x)$
$$= \frac{2}{x^2}\int_0^x t\, H_1(t)\,dt$$

• Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $H_2(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x t\, H_1(t)\,dt$

Or $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $H_1(x) = \int_{-\infty}^x h_1(t)\,dt = \int_{-\infty}^x 0 = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $H_1(x) = \int_{-\infty}^x h_1(t)\,dt = \int_{-\infty}^0 h_1(t)\,dt + \int_0^x h_1(t)\,dt$
$$= \int_0^x 2t\,e^{-t^2}\,dt$$
$$= \left[-e^{-t^2}\right]_0^x$$
$$= 1 - e^{-x^2}$$

donc $\forall x \leq 0,\ H_2(x) = 0$

et $\forall x > 0$, $H_2(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x t - t\,e^{-t^2} = \frac{2}{x^2}\int_0^x t - \frac{1}{2}(2t\,e^{-t^2})\,dt$
$$= \frac{2}{x^2}\left[\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}(1 - e^{-t^2})\right]_0^x$$
$$= \frac{2}{x^2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}(1 - e^{-x^2})\right) - 0$$
$$= 1 - \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2}$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $H_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \dfrac{1-e^{-x^2}}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

• Une densité possible de X_2 est déterminée par exemple par :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ -\left(\dfrac{(2x\,e^{-x^2})x^2 - 2x\,(1-e^{-x^2})}{x^4}\right. & \text{si } x > 0 \end{cases}$

d'où, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{-(2xe^{-x^2}(x^2+1) - 2x)}{x^4} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{2x - h_1(x)\,(x^2+1)}{x^4} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Partie D

$\forall f \in E$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\phi(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x t\,f(t)\,dt & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{f(0)}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(13) a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(|x|-|y|)^2 \geq 0$

donc $|x|^2 + |y|^2 - 2|xy| \geq 0$

donc $x^2 + y^2 \geq 2|xy|$

donc $\frac{1}{2}(x^2+y^2) \geq |xy|$

b) Soit $(f, g) \in (E_2)^2$

On a d'après ⓐ, $\forall x \geq 0, 0 \leq |f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}\left((f(x))^2 + (g(x))^2\right)$

or $\int_0^{+\infty} (f(x))^2 dx$ et $\int_0^{+\infty} (g(x))^2 dx$ convergent

alors $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\left((f(x))^2 + (g(x))^2\right) dx$ converge

Alors, par théorème de comparaison sur les intégrales d'intégrandes positifs, $\int_0^{+\infty} |f(x)g(x)| dx$ converge.

donc $\int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx$ est absolument convergente

(14) · $E_2 \subset E$

· $0_E \in E_2$

· Soit $(f, g) \in (E_2)^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

* $f + \lambda g$ est continue et définie sur $\mathbb{R}^+$ par théorèmes généraux

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $(f(x) + \lambda g(x))^2 = f(x)^2 + 2\lambda f(x)g(x) + \lambda^2 g(x)^2$

or $\int_0^{+\infty} f(x)^2 dx$, $2\lambda\int_0^{+\infty} f(x)g(x)dx$ et $\lambda^2\int_0^{+\infty} g(x)^2 dx$ convergent selon 13) b)

Alors $\int_0^{+\infty} (f(x) + \lambda g(x))^2 dx$ converge

donc $f + \lambda g \in E_2$

donc E_2 est un sous espace vectoriel

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 25 | Session : 2019

Épreuve de : Mathématiques EML S

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

(15). $\forall (f,g) \in E_2^2$, $\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ converge donc $\langle f,g\rangle$ est bien défini

. $\forall (f,g) \in E_2^2$, $\langle f,g\rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,dx = \int_0^{+\infty} g(x)f(x)\,dx = \langle g,f\rangle$

donc $\langle , \rangle$ est symétrique

. Soit $(f,g,h) \in E_2^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$\langle f+\lambda g, h\rangle = \int_0^{+\infty} (f+\lambda g)(t)\, h(t)$

$= \int_0^{+\infty} f(t)h(t) + \lambda g(t)h(t)\,dt$

$= \int_0^{+\infty} f(t)h(t)\,dt + \lambda \int_0^{+\infty} g(t)h(t)\,dt$ légitime car toutes les intégrales en jeu convergent

$= \langle f,h\rangle + \lambda\langle g,h\rangle$

donc $\langle , \rangle$ linéaire à gauche

. Soit $f \in E_2$, $\langle f,f\rangle = \int_0^{+\infty} (f(t))^2\,dt \geq 0$ car $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $(f(t))^2 \geq 0$

donc $\langle , \rangle$ positive

. Soit $f \in E_2$, $\langle f,f\rangle = 0$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} (f(t))^2\,dt = 0$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad f(t)^2 = 0$
$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad f(t) = 0$
$\Rightarrow f = 0_E$

donc $\langle , \rangle$ est défini

Donc $\langle , \rangle$ est un produit scalaire de E_2

16) Comme $\lim_{x \to 0} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$ d'après B)

alors $\lim_{x \to 0} \left(\frac{h(x)}{x^2}\right)^2 = \frac{f(0)^2}{4}$

donc $\lim_{x \to 0} \frac{h(x)^2}{x^4} = \frac{f(0)^2}{4}$

D'après B/ 5 b)
$\forall x > 0, \quad \exists (\alpha_x, \beta_x) \in [0, x]^2 / \quad f(\alpha_x) \frac{x^2}{2} \leq h(x) \leq f(\beta_x) \frac{x^2}{2}$

donc $\frac{f(\alpha_x)}{2} x \leq \frac{h(x)}{x} \leq \frac{f(\beta_x)}{2} x$

Par encadrement, on en déduit que, $\lim_{x \to 0^+} \frac{h(x)}{x} = 0$

donc $\lim_{x \to 0^+} \frac{h(x)^2}{x^3} = \lim_{x \to 0^+} \frac{h(x)}{x} \times \frac{h(x)}{x^2} = 0 \times \frac{f(0)}{2} = 0$

de même en 0^-

Donc $\lim_{x \to 0} \frac{h(x)^2}{x^3} = 0$

b) Soit $X > 0$,

On pose $u(t) =$ $u'(t)$

$v(t) =$ $v'(t) =$

c) Soit $X > 0$,

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda f(x) + \phi(f)(x))^2 \geq 0$

$\forall x \in [0, X]$,

d'où $\lambda^2 f(x)^2 + \lambda(2 f(x) \phi(f)(x)) + (\phi(f)(x))^2 \geq 0$

donc ~~$\int_0^t f(x)^2 dx + \lambda \int_0^t (2 f(x) \phi(f)(x)) dx + \int_0^t (\phi(f)(x))^2 \geq 0$~~

donc $\lambda^2 \int_0^t f(x)^2 dx + \lambda \int_0^t 2 f(x) \phi(f)(x) dx + \int_0^t (\phi(f)(x))^2 dx \geq 0$

donc $4\left(\int_0^t f(x) \phi(f)(x) dx\right)^2 - 4\left(\int_0^t f(x)^2 dx\right)\left(\int_0^t (\phi(f)(x))^2 dx\right) \leq 0$

donc $\left(\int_0^t f(x) \phi(f)(x) dx\right)^2 \leq \left(\int_0^t f(x)^2 dx\right)\left(\int_0^t (\phi(f)(x))^2 dx\right)$

donc en appliquant $t \mapsto \sqrt{t}$ qui est une bijection croissante sur $\mathbb{R}^+$

$$\int_0^t f(x) \phi(f)(x) dx \leq \left(\int_0^t f(x)^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_0^t (\phi(f)(x))^2 dx\right)^{1/2}$$

e) On a (par d) que $\forall X > 0$, $\left(\int_0^t (\phi(f)(x))^2 dx\right)^{1/2} \leq \frac{2}{3} \left(\int_0^t (f(x))^2 dx\right)^{1/2}$

Comme $\int_0^{+\infty} (f(x))^2 dx$ converge, alors par théorème de comparaison, $\int_0^{+\infty} (\phi(f)(x))^2 dx$ converge, et comme $\phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, $\phi(f) \in E_2$, et on a :

$$\left(\int_0^{+\infty} (\phi(f)(x))^2 dx\right)^{1/2} \leq \frac{2}{3} \left(\int_0^{+\infty} (f(x))^2 dx\right)^{1/2}$$

23/25

d'où, $\|\phi(\ell)\| \leq \frac{2}{3}\|\ell\|$

Partie E

(17) Le script suivant convient :

```
function [v] = suite_v(n)
    v=0
    for k= 1: n
        v= v + k*suite_u(k)
    end
    v= (1/n*(n+1))* v
endfunction
```

(18) a). Supposons que (U_n) est décroissante
. Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \geq 0$,
(U_n) étant décroissante et minorée par 0, alors
(U_n) converge

b) À la vue des graphes, on peut conjecturer que

- si (U_n) décroît, alors (V_n) décroît
- que si (U_n) converge alors (V_n) converge

~~d) Montrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}^*$,~~
~~P_n : " $(n+2) V_{n+1} = n V_n + U_{n+1}$ " est vraie~~

~~• $n=1$ $V_1 + U_2 = \frac{1}{2} U_1 +$~~

Code épreuve : 295	**Nombre de pages :** 25	**Session :** 2019

Épreuve de : Maths EML

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

(19) Soit $N \in \mathbb{N}^*$,

b) Supposons que $\sum_{n\geq 1} U_n$ converge

alors par a) on a :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{N} V_n = \sum_{k=1}^{N} U_k - N V_N$$

d) D'après c) $\lim_{N\to+\infty} N V_N = 0$

alors $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} V_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} U_n - 0$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} U_n \quad \text{car } \sum_{n\geq 1} U_n \text{ converge.}$$

donc la limite de $\left(\sum_{n=1}^{N} V_n\right)_{N\geq 1}$ étant finie, donc

$\sum_{n\geq 1} V_n$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} V_n = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

/

/