A0-00001
028183
Maths S

Code épreuve : 282 | **Nombre de pages :** 18 | **Session :** 2019

Épreuve de : Maths S ESSEC BS / HEC Paris

Partie I

1. $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{1-a} \\ \frac{a}{1-a} \end{pmatrix}}_{= C_1} ; \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{-1}{1-a} \\ \frac{-a}{1-a} \end{pmatrix}}_{= C_2} \right)$

$= \dim \operatorname{Vect}(C_1)$ (car $C_1 = -C_2$ et $1-a \neq 0$)

$= 1$ (car $C_1 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

donc $\operatorname{rg} A = 1$

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{1-a} & \frac{-1}{1-a} \\ \frac{a}{1-a} & \frac{-a}{1-a} \end{pmatrix} \\ A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-a} & \frac{-1}{1-a} \\ \frac{a}{1-a} & \frac{-a}{1-a} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{(1-a)^2} - \frac{a}{(1-a)^2} & \frac{-1}{(1-a)^2} + \frac{a}{(1-a)^2} \\ \frac{a}{(1-a)^2} - \frac{a^2}{(1-a)^2} & \frac{-a}{(1-a)^2} + \frac{a^2}{(1-a)^2} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{(1-a)^2} \begin{pmatrix} 1-a & -1+a \\ a-a^2 & -a+a^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-a} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \end{pmatrix}$$

$$= A$$

On a $f^2 = f$

On a, par une récurrence immédiate $\forall k \in [\![1 ; n]\!] \ f^k = f$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0 \times \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ donc 0 est valeur propre de A $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)$

$P = X^2 - X$ est un polynome annulateur de A donc 0 et 1 sont les seules valeurs propres possibles de A

$A\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ donc 1 est valeur propre de A $\left(\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)$

$E_0(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $E_1(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$

donc f admet deux valeurs propres distinctes et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

donc f est diagonalisable.

2.

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \end{pmatrix}$

$M = {}^tAA = \frac{1}{(1-a)^2}\begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+a^2 & -(1+a^2) \\ -(1+a^2) & 1+a^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1-a)^2}\begin{pmatrix} 1+a^2 & -(1+a^2) \\ -(1+a^2) & 1+a^2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} {}^tM = {}^t({}^tAA) \\ = {}^tAA \\ = M \end{pmatrix}$

M est symétrique réelle donc M est diagonalisable

Soit $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Ker}(s_f) = \mathrm{Ker}({}^tAA)$

Soit $X \in \mathrm{Ker}(A)$

Alors $AX = 0$ donc ${}^tAAX = 0$

donc $X \in \mathrm{Ker}({}^tAA)$

donc $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}({}^tAA)$

Soit $X \in \mathrm{Ker}({}^tAA)$

Alors ${}^tAAX = 0$ donc ${}^tX\,{}^tAAX = 0$

donc ${}^t(AX)(AX) = 0$

donc $\langle AX, AX\rangle = 0$

donc $\|AX\|^2 = 0$

donc $\|AX\| = 0$ (positivité de la norme)
donc $AX = 0$ (le seul vecteur de norme nul est le vecteur nul)

donc $X \in \mathrm{Ker}(A)$
donc $\mathrm{Ker}({}^tAA) \subset \mathrm{Ker}(A)$

Conclusion : $\mathrm{Ker}({}^tAA) = \mathrm{Ker}(A)$
donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(s_f)$

0 est valeur propre de f donc 0 est valeur propre de s_f
et $\mathrm{Ker}(s_f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$

M est diagonalisable donc $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $M = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & \lambda\end{pmatrix}$. Or deux matrices semblables ont même trace donc $\lambda = \frac{2(1+a^2)}{(1-a)^2}$. Or $M\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{2(1+a^2)}{(1-a)^2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
$\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)$ donc $\frac{2(1+a^2)}{(1-a)^2}$ est valeur propre de M et $E_\lambda(M) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

3. M est la matrice d'un projecteur

$\Leftrightarrow M^2 = O_2$

$\Leftrightarrow {}^tAA\,{}^tAA = O_2$

$\Leftrightarrow$

4. a

$$Tr({}^tAB) = \sum_{i=1}^{n} [{}^tAB]_{i,i}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} [{}^tA]_{i,k} [B]_{k,i}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}\, b_{k,i}$$

b. Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\langle A, B\rangle = Tr({}^tAB) = Tr({}^t({}^tAB))$$
$$= Tr({}^tBA)$$
$$= \langle B, A\rangle$$

donc $\langle . \rangle$ est symétrique

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, A, B et C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\langle \lambda A + B, C\rangle = Tr({}^t(\lambda A + B) C)$$
$$= Tr((\lambda\, {}^tA + {}^tB) C)$$
$$= Tr(\lambda\, {}^tAC + {}^tBC)$$
$$= \lambda\, Tr({}^tAC) + Tr({}^tBC)$$ linéarité de la trace
$$= \lambda \langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle$$

donc $\langle . \rangle$ est linéaire à gauche
Par symétrie, $\langle . \rangle$ est bilinéaire.

. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\langle A, A\rangle = Tr({}^tAA)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}\, a_{k,i}$$ (d'après 4.a.)
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2 \geq 0$$ double somme de termes positifs

donc $\langle . \rangle$ est positif

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 18 | Session : 2019

Épreuve de : Maths S ESSEC BS - HEC Paris

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Supposons $\langle A, A\rangle = 0$

Alors $Tr({}^tAA) = 0$ i.e $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2 = 0$

On sait que $\forall (i,k) \in [\![1;n]\!]^2$, $a_{k,i}^2 = 0$ donc $a_{k,i} = 0$
(double somme de termes positifs)
donc $A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

donc $\langle . \rangle$ est définie

Conclusion: $(A,B) \mapsto Tr({}^tAB)$ est un produit scalaire

c. $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $0 \leq |(A|B)| \leq \|A\|_2 \, \|B\|_2$
(inégalité de Cauchy-Schwarz)
Ainsi $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(A|{}^tA) = Tr({}^tA\,{}^tA) = Tr({}^t(AA)) = Tr(A^2)$
$\leq \|A\|_2 \, \|{}^tA\|$
$= \|A\|_2^2 = tr({}^tAA)$ (car

$\Leftarrow$ Si $A \in S_n(\mathbb{R})$, $tr({}^tAA) = tr(A^2)$
$\Rightarrow$ Si $tr(A^2) = tr({}^tAA)$

donc $tr(A^2) = tr({}^tAA) \iff A \in S_n(\mathbb{R})$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

5.a. $P = \underset{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}'}{\text{Pass}}$, $A = \underset{\mathcal{B}}{\text{Mat}}\, f$ et $A' = \underset{\mathcal{B}'}{\text{Mat}}\, f$

Ainsi, d'après la formule de changement de base

$$A = PA'P^{-1}$$

b. P est une matrice de passage entre deux bases orthonormées donc P est une matrice orthogonale ($\mathcal{B}$ en tant que base canonique étant orthonormée).

c. Mq ${}^tA' = \underset{\mathcal{B}'}{\text{mat}}\, f^*$

D'après 5.a, $A' = P^{-1}AP$

donc ${}^tA' = {}^tP\,{}^tA\,{}^t(P^{-1})$
$= P^{-1}\,{}^tA\,P$ (car P est orthogonale)

Ainsi, comme ${}^tA = \underset{\mathcal{B}_0}{\text{Mat}}\, f^*$, on en déduit d'après la formule de changement de base que ${}^tA' = \underset{\mathcal{B}'}{\text{mat}}\, f^*$

6. a. $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ${}^tX\,{}^tA\,AX = {}^t(AX)AX$
$= \langle AX | AX \rangle$
$= \|AX\|^2$

b.
Soit $X \in \text{Ker}(A)$
Alors $AX = 0$. donc ${}^tAAX = 0$
donc $X \in \text{Ker}({}^tAA)$

6 / 17

Soit $X \in \mathrm{Ker}({}^tAA)$

Alors ${}^tAAX = 0$

donc ${}^tX\,{}^tAAX = 0$

donc $\|AX\|^2 = 0$ (b.a)

donc $\|AX\| = 0$ (positivité)

donc $AX = 0$ (le vecteur nul est le seul de norme nulle)

donc $X \in \mathrm{Ker}(A)$

donc $\mathrm{Ker}({}^tAA) = \mathrm{Ker}(A)$

donc, par définition $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(s_f)$

Or, d'après le théorème du rang

$$n = \dim \mathrm{Ker}(A) + rg(f)$$
$$n = \dim \mathrm{Ker}({}^tAA) + rg(s_f)$$

Or, $\dim \mathrm{Ker}(A) = \dim \mathrm{Ker}({}^tAA)$ (comme on vient de montrer l'égalité)

On en déduit que $rg(f) = rg(s_f)$

c. Mq $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n$, $\langle x \mid s_f(y) \rangle = \langle s_f(x) \mid y \rangle$

Les valeurs propres de sf sont positives ou nulles
$(\Leftrightarrow)$ Les valeurs propres de ${}^tAA$ sont positive ou nulle

Or, ${}^tAA$ est une matrice symétrique réelle $({}^t({}^tAA) = {}^tAA)$
donc sa forme quadratique q est

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ q(X) = {}^tX\,{}^tAAX$$
$$= \|AX\|^2 \quad \text{(d'après 6.a)}$$
$$\geq 0$$

donc la forme quadratique associée à ${}^tAA$ est positive
donc les valeurs propres de sf sont positives ou nulles.

e. On cherche à montrer l'existence de $D \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$

On cherche $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\, sf = $

$$\begin{array}{cccccc}
sf(\varepsilon_1) & \cdots & sf(\varepsilon_r) & sf(\varepsilon_{r+1}) & \cdots & sf(\varepsilon_n) & \\
\end{array}$$
$$\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{cccccc}
d_{1,1} & \cdots & d_{1,r} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
d_{r,1} & \cdots & d_{r,r} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_r \\ \varepsilon_{r+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_n
\end{array}
\end{array}$$

On sait que $rg\, f = rg(sf) = r$
Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ une base de $\mathrm{Im}(sf)$
d'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(sf) = n - r$
Soit $(\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(sf)$

Il suffit de montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(sf) \oplus \mathrm{Ker}(sf)$
Ainsi, sf est le projecteur sur $\mathrm{Im}(sf)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(sf)$
Or $\mathrm{Im}(sf) = \mathrm{Ker}(sf - id)$
On a alors $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n)$ est une base adaptée de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle $\forall i \in$

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 18	Session : 2019

Épreuve de : Maths ESSEC - BS / HEC Paris

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

6. d. $^t(\mathrm{Mat}_C(f)) = \begin{pmatrix} {}^tA_1 & {}^tA_3 \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$ (par hypothèse sur de tels calculs)

$^t(\mathrm{Mat}_C(f))(\mathrm{Mat}_C(f)) = \begin{pmatrix} {}^tA_1A_1 + {}^tA_3A_3 & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$ (de même)

Or $\mathrm{Mat}_C(s_f) = \begin{pmatrix} D & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_C(s_f) = \mathrm{Mat}_C(f^* \circ f)$

$= \mathrm{Mat}_C f^* \times \mathrm{Mat}_C f$

$= {}^t\mathrm{Mat}_C f \times \mathrm{Mat}_C f$

Par égalité des deux matrices
$${}^tA_1A_1 + {}^tA_3A_3 = D$$

7. a.
$rg(s_f) = rg({}^tAA) = rg$
$= rg(A)$ d'après 6. b
$= rg({}^tA)$
$= rg({}^t({}^tA){}^tA)$ (en appliquant 6. b à ${}^tA$)
$= rg(A\,{}^tA)$
$= rg(T_f)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc, d'après le théorème du rang

$$n = \dim \mathrm{Ker}(s_f) + rg(s_f) \quad (\text{car } {}^tAA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$$
$$n = \dim \mathrm{Ker}(T_f) + rg(T_f) \quad (\text{car } A{}^tA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$$

donc $\dim \mathrm{Ker}(s_f) = \dim \mathrm{Ker}(T_f)$

b. $\lambda > 0$ valeur propre de s_f et x vecteur propre associé

alors $s_f(x) = \lambda x$

i.e. $(f^* \circ f)(x) = \lambda x$

i.e. $(f \circ f^* \circ f)(x) = f(\lambda x)$

i.e. $(f \circ f^*)(f(x)) = \lambda f(x)$

i.e. $T_f(f(x)) = \lambda f(x)$ avec $f(x) \neq 0$

$\lambda > 0$ et $x \in \mathrm{Ker}(s_f - \lambda id)$ donc $x \notin \mathrm{Ker}(s_f)$

Or si $f(x) = 0$ alors $x \in \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(s_f)$ (d'après 6.b)

ce qui est impossible

donc $f(x) \neq 0$

donc λ est valeur propre de T_f associé au vecteur propre $f(x)$.

c. ${}^t({}^tA\,A) = {}^tA\,A$

donc ${}^tA\,A$ est symétrique réelle donc diagonalisable
donc T_f est diagonalisable.

Or $s_f = f^* \circ f$ est un endomorphisme symétrique

i.e. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n, \langle (f^* \circ f)(x), y \rangle = \langle x, (f^* \circ f)(y) \rangle$

donc $\langle f \circ f^* \circ f$

Ainsi tout endomorphisme symétrique est diagonalisable en base orthonormée.

d.

8. a.

Soit $V_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 \geq 0\}$

$\vdots$

$V_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_n \geq 0\}$

$W_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 + \dots + x_n - 1 = 0\}$

Ainsi, $\forall i \in [\![1; n]\!]$ $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ et $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \dots + x_n - 1$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ (fonctions polynomiales)

Ainsi, les parties $V_1, \dots, V_n$ et W_1 sont des parties fermées donc $W = V_1 \cap \dots \cap V_n \cap W_1$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$

$\forall (x_1, \dots, x_n) \in W$, $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1 + \dots + x_n}$
$= \sqrt{1}$
$= 1$
≤ 1

donc W est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.

donc W est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$

b. f est une fonction polynomiale donc elle est continue sur $\mathbb{R}^n$ en particulier, elle est continue sur W, une partie fermée bornée donc on en déduit que f est bornée sur W et y atteint ses bornes donc $\exists M = \max(f(t) / t \in W)$, i.e. $\forall x \in W, f(x) \leq M$ (avec $M \geq 0$ car $\forall x \in V, f(x) \geq 0$)

c. $V \setminus U = \{(x_1, \dots, x_n) \in [0; +\infty[^n\} \setminus \{(x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n\}$

$= \{(x_1, \dots, x_n) = 0_{\mathbb{R}^n}\}$

donc $f(x_1, \dots, x_n) = f(0, \dots, 0) = \prod_{i=1}^{n} 0 = 0$

Emplacement QR Code

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 18

Session : 2019

Épreuve de : Maths ESSEC BS / HEC Paris

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

d. On sait que $M \geqslant 0$

e. $(a_1, \dots, a_n)$ est point critique

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

f) $S \in S_n(\mathbb{R})$ donc S est diagonalisable, i.e. il existe $P \in Gl_n(\mathbb{R})$ et D diagonale tels que

$$S = PDP^{-1} \quad \text{avec } D = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$$

où les $\mu_1, \dots, \mu_n$ sont les valeurs propres de S donc $\forall i \in [\![1;n]\!], \mu_i \geq 0$

On sait également que deux matrices semblables ont même trace donc $Tr(S) = Tr(D) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$

On cherche alors à montrer que $\prod_{i=1}^{n} \mu_i \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i}{n}\right)^n$

g. d'après f, $\forall x \in \mathbb{R}, \Delta(x) = \prod_{i=1}^{n}$

${}^tAA$ est symétrique donc de même qu'en 8.f, on a : il existe $P \in Gl_n(\mathbb{R})$ et D diagonale (dont les coefficients diagonaux sont $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$) telles que ${}^tAA = PDP^{-1}$

Or $Tr({}^tAA) = Tr(D) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$

et $Tr(x\, I_n) = \underbrace{x + \dots + x}_{n \text{ fois}} = nx$

Par linéarité de la trace, $Tr(x\, I_n + {}^tAA) = nx + \lambda_1 \dots \lambda_n$

donc $\left(\frac{tr(x\, I_n + {}^tAA)}{n}\right)^n = \left(\frac{nx + \lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n}\right)^n$

Partie III

9. $r \in [\![1, n-1]\!]$ et $f \circ f = \tilde{O}$

f est un projecteur donc $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$
et f est la projection sur $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - id)$ sur $\mathrm{Ker}(f)$
En prenant $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ une base de $\mathrm{Ker}(f - id)$ $(\mathrm{rg}\, f = r)$
et $(\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$
On a $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\varepsilon_i \in \mathrm{Ker}(f - id)$
donc $f(\varepsilon_i) = \varepsilon_i$
$\forall i \in [\![r+1, n]\!]$, $\varepsilon_i \in \mathrm{Ker}(f)$
donc $f(\varepsilon_i) = 0$

Or, comme $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker}(f)$, $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n)$
est une base de $\mathbb{R}^n$

dès lors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f(\varepsilon_1) & \cdots & f(\varepsilon_r) & f(\varepsilon_{r+1}) & \cdots & f(\varepsilon_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & (0) & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_r \\ \varepsilon_{r+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array}$

Ainsi $\mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f) = r$

10. a.

$f^2 = id$ donc $A^2 = I_n$

$${}^tAA\,A\,{}^tA = {}^tA\, I_n\, {}^tA$$
$$= {}^t(AA)$$
$$= I_n$$

donc ${}^tAA$ est inversible et $({}^tAA)^{-1} = A\,{}^tA$

b. Soit λ valeur propre de ${}^tAA$
Alors $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que ${}^tAAX = \lambda X$
Comme $\lambda \neq 0$

$$\frac{1}{\lambda}\,{}^tAAX = X$$

donc $\frac{1}{\lambda} AX = {}^tAX$ $\quad ({}^tAA = I_n)$

donc $\frac{1}{\lambda} X = A\,{}^tAX$

donc $\frac{1}{\lambda}$ valeur propre de $A\,{}^tA$

Or, $\dim E_{\frac{1}{\lambda}}(s_f) = \dim E_{\frac{1}{\lambda}}(T_f)$ d'après 7.c.

ici $\dim E_{\frac{1}{\lambda}}(T_f) \geq 1$ donc $\dim E_{\frac{1}{\lambda}}(s_f) \geq 1$

donc $\frac{1}{\lambda}$ valeur propre de ${}^tAA$

Ainsi $\dim E_{\lambda}({}^tAA) = \dim E_{\frac{1}{\lambda}}(A\,{}^tA) = \dim E_{\frac{1}{\lambda}}({}^tAA)$

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 18 | Session : 2019

Épreuve de : Maths S ESSEC BS - HEC Paris

Emplacement QR Code

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

10.c.

$x \in \mathbb{R}^{+*}$

Soit $g : x \mapsto x + \frac{1}{x} - 2$. Mq $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, g(x) \geq 0$

g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ (par somme de fonctions qui le sont)

donc $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

donc

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$g(1) = 1 + 1 - 2 = 0$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, g(x) \geq 0$

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad x + \frac{1}{x} \geq 2$

On a immédiatement $g(1) = 0$

donc $x + \frac{1}{x} = 2 \iff x = 1$

Partie V

16. Le théorème de projection orthogonale nous affirme que $d(M)$ est bien définie

$$\inf(\|M-V\|_2 \,/\, V \in O_n(\mathbb{R})) = \|M-p(M)\|$$

où p est la projection orthogonale sur $O_n(\mathbb{R})$

Ainsi $d(M) = \|M-p(M)\|$

17. $\|RN\|_2^2 = tr({}^t(RN)RN)$

$= tr({}^tN{}^tRRN)$

$= tr({}^tNN)$ car ${}^tR = R^{-1}$ comme $R \in O_n(\mathbb{R})$

$= \|N\|_2^2$

donc, par positivité de la norme, $\|RN\|_2 = \|N\|$

$\|NR\|_2^2 = tr({}^t(NR)NR)$

$= tr(NR\,{}^t(NR))$ $Tr(AB) = Tr(BA)$

$= tr(NR{}^tR{}^tN)$

$= tr(N{}^tN)$

$= ($

19. a. ${}^tW = {}^t\left(\frac{1}{2}(V+{}^tV)\right) = \frac{1}{2}({}^tV+V)$

$= \frac{1}{2}(V+{}^tV)$

$= W$

W est symétrique réelle donc diagonalisable